Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Second semestre 2008/2009
SMA2/SMI2
Mathématiques 2 - Algèbre 2

CONTROLE N°1

(18 Avril 2008, durée : 2 heures)

Exercice 1. (Questions de cours).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K.

1. Soient $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E de cardinal g et $\mathcal{L}$ une famille libre de E de cardinal l.

   (i) Comparer les trois nombres entiers n, g et l.

   (ii) Que peut-on dire des familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ si $n = g = l$?

2. Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ une famille de k vecteurs distincts de E.

   (i) Rappeler la définition du rang r de $\mathcal{F}$.

   (ii) Montrer qu'on a toujours $r \leq k$ et $r \leq n$.

   (iii) Montrer que : $r = k \Longleftrightarrow \mathcal{F}$ est libre.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = \text{Vect}\{u, v\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, -1, 3)$.

   Déterminer le réel t pour que le vecteur $w = (1, t, -1) \in F$ et déterminer dans ce cas les coordonnées de w dans la base $\{u, v\}$ de F.

2. Trouver une base et la dimension du sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^3$ formé des vecteurs $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$$

3. Montrer que $G \subseteq F$. A-t-on l'égalité ? Justifiez votre réponse.

4. Soit le sous-espace vectoriel $H_a = \{(x, y, a) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$. Montrer que :

$$H_a \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff a = 0.$$

5. On prend $a = 0$. Montrer que $H_0 \oplus G = E$.

6. Les sous-espaces H_0 et F sont-ils supplémentaires dans E ? Justifiez votre réponse.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..